UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

20 febbraio 2014

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________ Genere: F M

Indirizzo:__________ Città:__________

Scuola:__________ Anno di corso:_____ Città:__________

Email:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Ringraziamenti:

La gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, valutato e modificato i problemi:

Alessandro D'Andrea, Alessandro Iraci, Andrea Bianchi, Andrea Sambusetti, Carmelo Di Stefano, Carmine Frascella, Davide Lofano, Davide Lombardo, Emanuele Grossi, Emanuele Tron, Fabio Ferri, Fabio Lilliu, Fabio Marconi, Federico Glaudo, Federico Poloni, Fedor Getman, Giada Franz, Gioacchino Antonelli, Giorgio Busoni, Giovanni Barbarino, Giovanni Paolini, Kirill Kuzmin, Luca Minutillo Menga, Ludovico Pernazza, Marco Trevisiol, Matteo Stefanini, Nirvana Coppola, Paolo Abiuso, Paolo Leonetti, Paolo Negrini, Riccardo Morandin, Stefania Monica.

Alessandra Caraceni e Luigi Amedeo Bianchi

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Le facce di due tetraedri regolari identici vengono colorate di rosso, bianco, verde, blu; i colori sono scelti casualmente, ma le quattro facce di ciascun tetraedro debbono essere tutte di colori diversi. Qual è la probabilità che dopo la colorazione i due tetraedri siano indistinguibili?

   (A) $\frac{1}{4!}$ **(B)** $\frac{2}{4!}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** 1

2. I 60 abitanti di un villaggio possono essere di tre tipi: contadini (che dicono sempre la verità), lupi mannari (che mentono sempre) e negromanti (che rispondono come vogliono). Tranne che per questi comportamenti i membri di ciascuna fazione sono completamente indistinguibili da quelli delle altre. All'arrivo di un visitatore si dispongono in circolo e ciascuno dichiara che l'abitante alla sua destra è un lupo mannaro. Quale di queste frasi è necessariamente vera?

   (A) C'è almeno un negromante. **(B)** I lupi mannari sono al più 20. **(C)** I contadini sono al più 30. **(D)** I negromanti non sono più di 40. **(E)** Nessuna delle precedenti.

3. Tre amici entrano nella pizzeria di Giorgio e siedono ciascuno a un lato di un tavolo rettangolare; il primo è seduto a un lato di lunghezza 70 cm, il secondo e il terzo siedono uno di fronte all'altro, su lati di lunghezza l. Le pizze hanno un diametro di 30 cm; Giorgio serve la pizza del primo avventore in modo che sia tangente al suo lato del tavolo nel punto medio e le pizze degli altri due in modo che siano tangenti ai rispettivi lati del tavolo e alla prima pizza. Qual è il minimo valore di l (in centimetri) per cui le tre pizze possano stare interamente sul tavolo?

   (A) $10\sqrt{5}$ **(B)** $20 + 5\sqrt{5}$ **(C)** $15 + 10\sqrt{5}$ **(D)** $30 + 10\sqrt{5}$ **(E)** 60

4. Davide fa il seguente gioco: parte da un numero intero compreso tra 1 e 99 e ad ogni mossa sostituisce il numero n che ha al momento con il numero formato dalle ultime due cifre di $51n+50$ (o solo dall'ultima cifra, se la penultima è 0). Quanti numeri diversi può ottenere al massimo nel corso delle prime 100 mosse di una singola partita?

   (A) 2 **(B)** 4 **(C)** 51 **(D)** 99 **(E)** 100

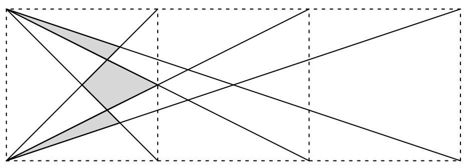
5. Alessandro, Daniele e Manuela discutono di un numero naturale n di due cifre. Ognuno di loro fa due affermazioni, ma siccome sono tutti un po' scarsi in matematica ognuno di loro fa un'affermazione vera ed una falsa.
   Alessandro dice: "n è pari. Inoltre è un multiplo di 3.";
   Daniele risponde: "Sì, n è un multiplo di 3. Inoltre, la cifra delle unità di n è 5.";
   Manuela dice, infine: "n è multiplo di 5. La somma delle sue cifre è 12.".
   Quanti valori può assumere n?

   (A) Non esiste tale n. **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

6. Quanti interi positivi sono una potenza di 4 e si scrivono in base 3 usando solo le cifre 0 e 1, lo 0 quante volte si vuole (anche nessuna) e l'1 al più due volte?

   (A) 4 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** 0 **(E)** Infiniti.

7. Alessandra e Luigi giocano ad un gioco da tavolo le cui pedine sono delle astronavi, come quella rappresentata in grigio nella figura a lato. Se i quadrati tratteggiati hanno i lati di lunghezza 1, qual è la superficie di una pedina?

   (A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$ **(E)** $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12}$

8. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 27 \\ xyz = 5, \end{cases}$$

   quante terne ordinate di numeri reali (x, y, z) ne sono soluzione?

   (A) 6 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 0 **(E)** Infinite.

9. Cinque amici devono scendere da una seggiovia a cinque posti e possono farlo andando in tre direzioni differenti: a sinistra, dritto oppure a destra. Scendendo da una seggiovia è facile scontrarsi con i propri compagni di risalita. Per esempio: se io decido di andare dritto e qualcuno alla mia sinistra di andare a destra, ci scontriamo; lo stesso accade se io decido di andare a destra e qualcuno alla mia destra va dritto (o a sinistra); se invece qualcuno va nella mia stessa direzione **non** ci scontriamo; e così via. Se ciascuno dei cinque amici sceglie a caso dove andare, con probabilità 1/3 per ciascuna direzione, qual è la probabilità che non ci siano scontri?

   (A) $\frac{25}{27}$ **(B)** $\frac{3}{5}$ **(C)** $\frac{40}{81}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{7}{81}$

10. Consideriamo il polinomio $p(x) = (1 + x^{3^1})(1 + x^{3^2})(1 + x^{3^3})(1 + x^{3^4})(1 + x^{3^5})(1 + x^{39})$, e supponiamo di svolgere il prodotto, ottenendo quindi un'espressione del tipo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{375}x^{375}$, dove ad esempio $a_0 = a_{402} = 1$. Quanti dei coefficienti $a_0, \ldots, a_{402}$ sono diversi da zero?

    (A) 52 **(B)** 56 **(C)** 60 **(D)** 64 **(E)** 376

11. Un pilota di aquiloni ha disputato quest'anno un buon campionato, arrivando a podio 16 volte. In ogni gara il primo classificato conquista 10 punti, il secondo 8 e il terzo 5, mentre dal quarto posto in poi non vengono assegnati punti. Con quanti punteggi diversi può aver concluso il campionato?

    (A) 153 **(B)** 80 **(C)** 78 **(D)** 75 **(E)** Nessuna delle precedenti.

12. Sia ABC un triangolo con i lati AB, CA e BC di lunghezza rispettivamente 17, 25 e 26. Siano X e Y le intersezioni della parallela ad AB passante per C con le bisettrici di $C\widehat{A}B$ e di $A\widehat{B}C$ rispettivamente. Quanto vale l'area del trapezio $ABXY$?

    (A) 816 **(B)** $338(1 + \sqrt{2})$ **(C)** 784 **(D)** 408 **(E)** Non si può determinare con i dati a disposizione.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Qual è l'esponente del primo 2 nella fattorizzazione del numero

$$(5 - 1)(5^5 - 1)\ldots(5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}} - 1)$$

    dove in ogni fattore compare ad esponente un "5" in più che nel precedente e nell'ultimo ne compaiono, come esponenti, 2014?

14. Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da un passo in verticale, o due passi in verticale seguiti da un passo in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Una griglia con m righe ed n colonne ha ogni casella colorata in bianco o in nero in modo da rispettare le seguenti due condizioni:

(a) ogni riga contiene tante caselle bianche quante nere;

(b) se una riga incontra una colonna in una casella nera, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle nere; allo stesso modo, se una riga interseca una colonna in una casella bianca, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle bianche.

Trovare tutte le possibili coppie (m, n) per cui può esistere una siffatta colorazione.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia ABC un triangolo acutangolo. Siano AM, BN e CL le mediane, che si intersecano nel baricentro G. Siano M', N' e L' i punti medi di AG, BG e CG, rispettivamente. Mostrare che i sei punti M, M', N, N', L, L' giacciono su una circonferenza se e solo se ABC è equilatero.

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Trovare tutte le coppie (a, b) di numeri interi positivi tali che $a + 1$ sia un divisore di $b - 1$ e b sia un divisore di $a^2 + a + 2$.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(D)**. Poggiamo entrambi i tetraedri sulla faccia rossa e ruotiamoli fino ad avere davanti a noi la faccia bianca. A questo punto ci sono due casi possibili, quella a destra può essere verde o blu. Di qualunque colore sia quella del primo tetraedro, la probabilità che nel secondo sia del medesimo colore e che quindi i due tetraedri siano indistinguibili è $1/2$.

2. La risposta è **(C)**. Una delle possibilità è che ci siano 30 lupi mannari e 30 contadini, alternati. Questa disposizione falsifica la **(A)** e la **(B)**. Un'altra possibile situazione è che gli abitanti del villaggio siano tutti negromanti e stiano mentendo tutti, il che falsifica la **(D)**. Consideriamo ora la **(C)**. Se ci sono n contadini, ci devono essere almeno n abitanti che non siano contadini (ma lupi mannari o negromanti), dal momento che i contadini non possono mentire. Quindi i contadini possono essere al più la metà del totale degli abitanti, cioè al più 30.

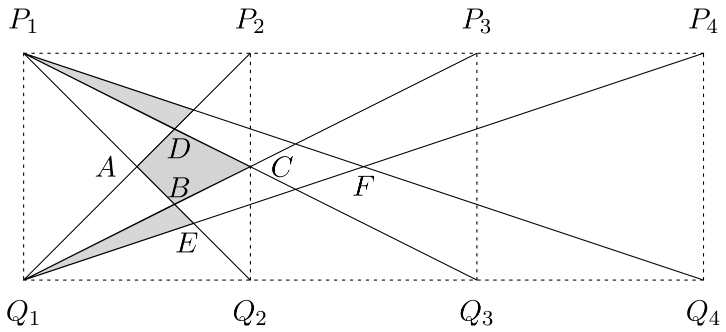
3. La risposta è **(D)**. Consideriamo un tavolo rettangolare in cui la lunghezza l sia la minima tale che le tre pizze sono interamente contenute sulla sua superficie, e cioè tale che la seconda e la terza pizza siano tangenti al lato al quale non siede nessuno dei tre amici. Chiamiamo O_1, O_2 i centri delle prime due pizze, e sia P il punto d'intersezione fra la retta per O_1 parallela al lato cui tange la seconda pizza (che ha lunghezza l) e la retta per O_2 parallela al lato cui tange la prima pizza (che ha lunghezza 70 cm). Allora $l = 15 + O_1P + 15$; d'altra parte O_1O_2 è lungo 60 cm, mentre la lunghezza di O_2P può essere calcolata, in centimetri, come $\frac{70}{2} - 15 = 20$; l'angolo $O_1\widehat{P}O_2$ è retto per definizione, e dunque per il Teorema di Pitagora $O_1P = \sqrt{{O_1O_2}^2 - O_2P^2}$, e cioè la lunghezza cercata risulta, in centimetri, $30 + 10\sqrt{5}$.

4. La risposta è **(A)**. Supponiamo di partire da un numero n dispari: allora lo possiamo scrivere come $n = 2k+1$, e moltiplicando per 51 ed aggiungendo 50 troviamo $102k+101 = 100k+100+(2k+1)$. Ora $100k+100$ è un numero che termina con due zeri, quindi le ultime due cifre di $51n+50$ sono le stesse di quelle di n, e il gioco rimane sempre fisso su n. Se invece partiamo da un numero pari $n = 2k$, la regola fornisce $102k+50$, che termina con le stesse due cifre di $2k+50$: dunque se $2k$ è minore di 50 troviamo semplicemente $2k+50$, e altrimenti troviamo $2k-50$ per via del riporto. Al passo successivo, lo stesso ragionamento ci dice che $2k+50$ diventerà $2k+50-50 = 2k$ (visto che $2k+50$ è sicuramente almeno uguale a 50), e similmente $2k-50$ diventerà $2k-50+50 = 2k$: il gioco si ripete ogni due turni, e quindi i numeri diversi che possiamo ottenere nel corso di una partita sono al più 2.

5. La risposta è **(D)**. Supponiamo prima che n sia pari: allora non è un multiplo di 3, perché una delle due affermazioni di Alessandro deve essere falsa, e quindi (usando quello che dice Daniele) la cifra delle unità di n deve essere 5, ma questo è impossibile per un numero pari. Il numero n (se esiste) è dunque multiplo di 3: la prima affermazione di Alessandro è allora falsa, quindi n è dispari, e per quello che dice Daniele la cifra delle unità non può essere 5. Dunque n non può essere multiplo di 5, perché la sua cifra delle unità (non potendo essere 0, visto che n è dispari) sarebbe 5: ne segue che l'affermazione vera che fa Manuela è che la somma delle cifre è 12. I soli numeri di due cifre le cui cifre sommano a 12 sono $39, 48, 57, 66, 75, 84$ e 93, e tra questi dobbiamo prendere solo quelli dispari e multipli di 3, che sono $39, 57$ e 93.

6. La risposta è **(B)**. Un numero che in base 3 termina con zero è un multiplo di 3; siccome nessuna potenza di 4 è un multiplo di 3, i numeri che cerchiamo, in base 3, finiscono con 1. Se usiamo esattamente una cifra 1, l'unica possibilità è quindi il numero che si scrive come 1 in base 3, cioè 1. Ammettere un'altra cifra 1, che corrisponde ad un certo 3^k, vuole invece dire risolvere l'equazione $3^k + 1 = 4^a$. Scrivendo $4^a = 2^{2a}$ troviamo $3^k = (2^a+1)(2^a-1)$, quindi sia 2^a+1 che 2^a-1 sono potenze di 3, ed è chiaro che le uniche due potenze di 3 a distanza 2 sono $1, 3$, da cui $a = 1$, e l'unica altra potenza di 4 con la proprietà richiesta è proprio 4.

7. La risposta è **(C)**.



Prima soluzione

Diamo dei nomi ai punti coinvolti, come in figura. Il quadrilatero $ABCD$ è formato da due triangoli simmetrici rispetto alla retta AC; la sua area si può dunque calcolare come $\frac{1}{2}AC \cdot BD$. D'altra parte, A è il centro del quadrato $P_1Q_1Q_2P_2$ e C il punto medio del segmento Q_2P_2, dunque la lunghezza di AC è $\frac{1}{2}$. Si noti ora che la retta AC è parallela alla retta Q_1Q_2 e di conseguenza i due triangoli ABC e Q_2BQ_1 sono simili; detta h l'altezza di Q_2BQ_1 relativa a Q_1Q_2 si ha quindi $h : \frac{BD}{2} = Q_1Q_2 : AC = 1 : \frac{1}{2}$, ovvero $BD = h$; poiché d'altra parte $BD + 2h = 1$, la lunghezza di BD risulta $\frac{1}{3}$.

Calcoliamo ora l'area del triangolo BEQ_1 come differenza fra quella dei triangoli Q_1Q_2B e Q_1Q_2E, cioè come $\frac{1}{2}Q_1Q_2 \cdot (h - h')$, dove h' è l'altezza di Q_1Q_2E relativa a Q_1Q_2. Il punto di intersezione F fra le rette Q_1P_4 e P_1Q_4 è il centro del quadrato $Q_2Q_3P_3P_2$; la retta AF è parallela alla retta Q_1Q_2 e dunque i triangoli Q_1Q_2E e FAE sono simili. D'altra parte $AF = 1 = Q_1Q_2$, e perciò si tratta in realtà di triangoli congruenti, da cui $h' = \frac{1}{4}$. L'area di BEQ_1 vale dunque $\frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{24}$.

L'area della pedina, in conclusione, vale $2 \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Seconda soluzione

Consideriamo le coordinate dei punti in un piano cartesiano centrato in Q_1, con P_1 sull'asse y e Q_2 sull'asse x. E' facile verificare che A ha coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, C ha coordinate $(1, \frac{1}{2})$ e F ha coordinate $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Il punto B è l'intersezione fra la retta Q_1P_3 (di equazione $y = \frac{1}{2}x$) e la retta P_1Q_2 (di equazione $x+y = 1$), dunque ha coordinate $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; E, in quanto intersezione fra la retta di equazione $y = \frac{1}{3}x$ e quella di equazione $x + y = 1$, ha coordinate $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. E' ora immediato calcolare l'area della pedina, che risulta $\frac{1}{6}$.

8. La risposta è **(B)**.

Prima soluzione

Siano $s = x + y + z = 7, q = xy + yz + zx$ e $p = xyz = 5$. Si può notare facilmente che $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 27 + 2q$, da cui $q = 11$. Consideriamo ora il polinomio $(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz = t^3 - 7t^2 + 11t - 5$, che per costruzione ha come uniche soluzioni x, y e z. Si verifica che $p(1) = 1 - 7 + 11 - 5 = 0$ e che $p(5) = 0$, quindi due tra x, y, z sono 5 e 1, e siccome il prodotto xyz è 5 la terza variabile deve essere uguale ad 1. Ne segue che x, y, z sono $1, 1, 5$ in un qualche ordine, e quindi ci sono esattamente tre terne ordinate di soluzioni: $(1, 1, 5), (1, 5, 1)$ e $(5, 1, 1)$.

Seconda soluzione

Come prima troviamo $11 = x(y + z) + yz$; sostituendo $y + z = 7 - x$ troviamo quindi $11 = x(7-x)+yz$. Moltiplicando entrambi i lati per x si ottiene $11x = x^2(7-x)+xyz = -x^3+7x^2+5$, quindi x è una soluzione di questa equazione. Si verifica che le uniche soluzioni sono 1 e 5, da cui si ricavano immediatamente i valori di y, z: per esempio, se $x = 5$, allora $x + y = 2, xy = 1$, da cui $x = y = 1$.

9. La risposta è **(E)**. Cominciamo contando i casi totali, cioè le stringhe di lunghezza 5 composte con le lettere S, A e D (Sinistra, Avanti e Destra). Ciascuno dei cinque amici può prendere

indipendentemente dagli altri una tra le tre direzioni, quindi queste stringhe sono $3^5 = 243$. Pensiamo ora a quali sono le stringhe per cui non ci sono incidenti: sono le stringhe in cui tutte le S (anche 0) compaiono prima di tutte le A (anche 0), che compaiono prima di tutte le D (anche 0). Dobbiamo quindi trovare tutte le stringhe di cinque lettere che soddisfano questa condizione. In altri termini dobbiamo scrivere 5 come somma di 3 addendi ordinati non negativi. Questo si può fare in $\binom{7}{2} = 21$ modi. In conclusione la probabilità che non ci siano scontri è $7/81$.

10. La risposta è **(C)**. Osserviamo innanzitutto che i coefficienti non nulli sono al più $2^6 = 64$, a seconda che in ciascun fattore prendiamo il termine 1 o il termine in x. Tuttavia possiamo osservare che $x^3 \cdot x^9 \cdot x^{27} = x^{39}$, quindi ci sono termini nello svolgimento del prodotto che contribuiscono ad un solo termine nel polinomio risultante. Quanti sono questi termini che si ripetono (e che dovremo poi togliere dai 64 indicati sopra)? Sono 4, cioè x^{39}, $x^{39} \cdot x^{3^4}$, $x^{39} \cdot x^{3^5}$ e $x^{39} \cdot x^{3^4} \cdot x^{3^5}$.

11. La risposta è **(D)**. Dobbiamo calcolare tutte le possibili somme che si possono ottenere con 16 addendi scelti tra 5, 8 e 10. Scriviamo dunque $n = 5a + 8b + 10c$, dove $a + b + c$ sono interi non negativi la cui somma è 16. Innanzitutto ricaviamo $a = 16 - b - c$, da cui $n = 80 + 3b + 5c$, in cui adesso b, c sono interi non negativi con somma *al più* 16. Siccome dobbiamo solo contare il numero di possibili punteggi diversi, l'addendo 80 non fa differenza e ci chiediamo semplicemente quanti numeri si scrivono come $3b + 5c$. In più ora è chiaro che due coppie (b, c) e (b', c') danno la stessa somma se e solo se $b' = b + 5h, c' = c - 3h$ per un certo h intero.

    Cominciamo allora a contare i punteggi per c piccolo: con $c = 0$ abbiamo 17 scelte per b (da 0 a 16), con $c = 1$ ne abbiamo 16 e poi 15 con $c = 2$, e non abbiamo introdotto ripetizioni; se c è 3, allora possiamo rimpiazzare la coppia $(b, 3)$ con la coppia $(b + 5, 0)$, a meno che $b + 5 > 16$, quindi le somme che non abbiamo ancora contato sono solo quelle con $b > 11$ (e d'altro canto $b + 3 \leq 16$), dunque soltanto quelle corrispondenti a $(b, c) = (12, 3)$ e $(13, 3)$. Allo stesso modo, per $c \geq 4$, da una coppia (b, c) ci possiamo ridurre alla coppia $(b + 5, c - 3)$, che abbiamo già considerato, a meno che $b + c + 2 > 16$: gli unici casi in cui questo succede, visto che $b + c \leq 16$, sono quelli in cui $b + c = 15$ o 16, cioè esattamente 2 coppie per ogni valore di c, a meno che $c = 16$, per cui c'è solo la possibilità $b = 0$. In definitiva, il numero di somme richiesto è $17 + 16 + 15 + 13 \cdot 2 + 1 = 75$.

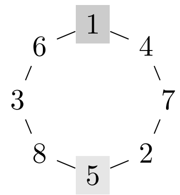
12. La risposta è **(A)**. Sia I l'incentro del triangolo ABC; allora i triangoli AIB e XIY sono simili per via del parallelismo fra le rette AB e XY. Sia h l'altezza del trapezio $ABXY$, ovvero l'altezza del triangolo ABC relativa alla base AB; l'altezza del triangolo AIB relativa ad AB è il raggio della circonferenza inscritta in ABC, la cui lunghezza vale $S_{ABC}/p_{ABC} = S_{ABC}/34$. D'altra parte, $h = 2S_{ABC}/17$. Abbiamo, grazie alla similitudine menzionata sopra, $X_Y : AB = XY : 17 = (2S_{ABC}/17 - S_{ABC}/34) : S_{ABC}/34$; ovvero $XY = 3 \cdot 17 = 51$. L'area del trapezio vale dunque $\frac{1}{2}(17 + 51)h = 34h$.

    L'altezza h può essere calcolata come $\frac{2}{AB}\sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$, tramite la formula di Erone, dove p è il semiperimetro di ABC; sostituire le lunghezze dei lati dà $h = 24$, e dunque $S_{ABXY} = 816$. Alternativamente è possibile calcolare h tramite il Teorema di Pitagora: dette x e y le proiezioni dell'altezza su AB, sappiamo che $x + y = 17$, $x^2 + h^2 = 25^2$ e $y^2 + h^2 = 26^2$, da cui $y^2 - x^2 = (x + y)(y - x) = 17(x - y) = 51$. Risolvendo il sistema per x e y si ottiene, ad esempio, $y = 10$, e quindi $h = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.

13. La risposta è **4030**. Se d è un intero dispari, l'espressione $5^d - 1$ si può fattorizzare come $(5 - 1)(5^{d-1} + 5^{d-2} + \ldots + 1)$ dove il secondo fattore contiene d addendi dispari, ovvero un numero dispari di addendi dispari, e dunque è dispari. Un numero della forma $5^d - 1$ con d dispari è perciò divisibile per 4, e per nessuna potenza più alta di 2; poiché l'espressione del problema è precisamente un prodotto di 2015 fattori in questa forma, il numero primo 2 compare nella sua fattorizzazione con un esponente di $2 \cdot 2015$, cioè 2030.

14. La risposta è **992**. Osserviamo che il cavallo si muoverà sempre su caselle adiacenti al perimetro della scacchiera (tutte tranne quella centrale) e che da ogni casella sono possibili due mosse: una che porta il cavallo avanti di 3 caselle sul perimetro in senso orario, e una che lo sposta

di 3 caselle in senso antiorario. Se si numerano le caselle del perimetro della scacchiera da 1 a 8 in senso orario, dove la casella 1 è quella di partenza, le mosse del cavallo possono essere rappresentate come nella figura che segue: ciascuna mossa porta il cavallo dal vertice dell'ottagono corrispondente alla casella in cui si trova a uno dei due adiacenti, a seconda che sia in senso orario o antiorario. Per arrivare all'angolo opposto, il cavallo deve spostarsi in totale di 4 posizioni sull'ottagono, più eventualmente di un numero intero di giri dell'ottagono (8 mosse in senso orario o antiorario riportano il cavallo sulla casella di partenza).



Sia x il numero di mosse effettuate in senso orario, y il numero di mosse effettuate in senso antiorario; dobbiamo contare il numero di percorsi possibili in cui $x + y = 12$ (si compiono 12 mosse in totale) e $x - y$ è un numero della forma $8k+4$ (con k intero). Le coppie ordinate di soluzioni possibili (con x e y non negativi) sono le seguenti: $x = 12$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 12$; $x = 8$, $y = 4$; $x = 4$, $y = 8$.
Le prime due coppie rappresentano i due percorsi in cui il cavallo fa tutte le mosse in senso orario o antiorario. Le altre due coppie rappresentano percorsi in cui vengono fatte 8 mosse in senso orario e 4 in senso antiorario, o viceversa; il numero di tali percorsi è dato dal numero di modi in cui è possibile scegliere l'ordine delle mosse: in particolare, si tratta di $\binom{12}{4}$ in entrambi i casi (fra le 12 mosse da effettuarsi, dalla prima alla dodicesima, vanno scelte le 4 che saranno svolte in senso antiorario nel primo caso, orario nel secondo).

Il totale risulta quindi $2 + 2\binom{12}{4} = 992$.

15. Dalla prima condizione abbiamo che il numero di colonne è necessariamente pari. In generale le righe, di lunghezza $2a$, hanno a caselle bianche ed a caselle nere. Per ogni riga ci saranno almeno una colonna che la interseca in una casella bianca ed almeno una che la interseca in una casella nera. Consideriamo quella che interseca in una casella bianca. Essa ha esattamente a caselle bianche. Quindi una possibile soluzione è data dalle coppie $(a, 2a)$, in cui metà delle colonne sono interamente bianche e metà interamente nere. Una possibile realizzazione di tale soluzione è una scacchiera in cui le prime a colonne sono bianche e le successive a sono nere.
Se invece non sono monocrome significa che esiste almeno una casella nera, ma allora in tale casella la colonna interseca una riga con a caselle nere, dunque anche la colonna deve avere a caselle nere oltre alle a caselle bianche. La seconda famiglia di soluzioni possibili è dunque data dalle coppie $(2a, 2a)$. Una possibile realizzazione in questo caso è una scacchiera colorata in modo canonico.

16. Osserviamo che prendendo in considerazione la mediana AM, abbiamo che i tre segmenti AM', $M'G$ e GM sono uguali tra loro, poiché il baricentro divide la mediana in due segmenti uno il doppio dell'altro ed M' è per costruzione il punto medio del segmento più lungo dei due, AG. Un analogo risultato vale per le altre due mediane.

    Supponiamo di avere un triangolo equilatero, allora le tre mediane sono uguali tra loro, quindi i punti M, M', N, N', L, L' sono equidistanti da G, cioè giacciono su una circonferenza di centro G.

    Supponiamo ora che i sei punti M, M', N, N', L, L' giacciano su una circonferenza di centro O. Tale punto O giace sugli assi dei tre segmenti MM', NN' e LL' e, dal momento che G è punto medio di ciascuno di essi, G ed O si trovano entrambi contemporaneamente sugli assi di tali segmenti. Poiché i tre assi sono distinti, ne deriva che G e O devono coincidere. Ma dunque $GM = GN = GL$ in quanto raggi della stessa circonferenza, e perciò le tre mediane del triangolo ABC, che come affermato in precedenza hanno lunghezza $3GM$, $3GN$, $3GL$, lono uguali tra loro. Un triangolo che ha tutte le mediane uguali è equilatero, poiché per ogni coppia di mediane uguali è isoscele sui due lati cui le mediane sono relative.

17. Prima soluzione

    Consideriamo b; dal momento che $a + 1$ divide $b - 1$ possiamo scrivere $b = k(a + 1) + 1$, con k naturale. Riformuliamo la seconda condizione come $(k(a + 1) + 1)h = a^2 + a + 2$, ovvero $kh(a + 1) + h = a(a + 1) + 2$ per qualche $h \in \mathbb{N}$.

Supponiamo anzitutto che k sia positivo; se $kh = a$, allora $h = 2$; ne derivano le soluzioni del tipo $(2k, k(2k+1)+1)$ dove k è intero positivo. Se invece $kh < a$, allora $h > a+3$; d'altra parte, se k è positivo, deve aversi $h \leq hk$, il che è assurdo.

Rimane il caso in cui k sia 0, e dunque $b = 1$; tutte le coppie $(a, 1)$, con a intero positivo, sono in effetti soluzione.

Seconda soluzione

Come prima scriviamo $b = k(a+1)+1$, con $k \in \mathbb{N}$ e $(k(a+1)+1)h = a^2+a+2$ per qualche $h \in \mathbb{N}$.
Osserviamo che per $b = 1$ abbiamo $k = 0$ ed a può essere qualunque numero naturale $n > 0$, cioè tutte le coppie $(n, 1)$ sono soluzione.
Consideriamo la seconda condizione in modulo $(a+1)$: abbiamo che $h \equiv 2 \mod (a+1)$. Ora, se avessimo $h \geq (a+1)+2$, escludendo il caso $k = 0$ già considerato, otterremmo

$$(k(a+1)+1)h \geq (a+2)h \geq (a+2)(a+3) = a^2+a+2+4(a+1) > a^2+a+2,$$

in contrasto con la seconda condizione. Dunque $h = 2$ e $2k(a+1)+2 = a(a+1)+2$, da cui $a = 2k$. Di conseguenza abbiamo, sostituendo nella prima condizione, $b = k(2k+1)+1$, da cui ricaviamo le altre soluzioni $(2k, 2k^2+k+1)$, per $k > 0$ naturale.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Ovviamente si assegnino 15 punti per la soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta.

- Indicare la famiglia $(2a, 2a)$ come facente parte delle soluzioni: **un punto**.
- Indicare la famiglia $(a, 2a)$ come facente parte delle soluzioni: **un punto**.
- Osservare che il numero di colonne è necessariamente pari: **2 punti**.
- Dimostrare che se ogni colonna è di un solo colore allora le soluzioni sono del tipo $(a, 2a)$: **3 punti**.
- Dimostrare che se esiste almeno una colonna che contenga almeno una casella nera ed almeno una casella bianca allora $m = n$: **4 punti**.
- Mostrare una soluzione esplicita per la famiglia $(2a, 2a)$: **2 punti**.
- Mostrare una soluzione esplicita per la famiglia $(a, 2a)$: **2 punti**.

Esercizio 16

La dimostrazione dell'implicazione $\Leftarrow$ vale **5 punti**, quella dell'implicazione $\Rightarrow$ **10 punti**. Come sempre per ciascuna delle parti si assegni punteggio pieno qualora venga presentata una soluzione completa, anche se diversa da quella proposta.
Per dimostrazioni parziali dell'implicazione $\Leftarrow$ si assegnino punteggi parziali secondo le seguenti indicazioni:

- **2 punti** per chi osserva che su ciascuna delle mediane il baricentro ed il punto della costruzione suddividono la mediana stessa in tre parti uguali, cioè $MG = M'G = M'A$ eccetera;
- **2 punti** per chi osserva che in un triangolo equilatero tutte le mediane sono uguali tra loro.
- **1 punto** per la conclusione.

Per soluzioni parziali dell'implicazione $\Rightarrow$:

- **3 punti** per chi osserva che il centro della circonferenza O giace sugli assi di MM', NN';
- **1 punto** per chi osserva solamente che O e G si trovano entrambi sugli assi di tali segmenti;
- **2 punti** per chi ne deduce che O e G coincidono;
- **2 punti**, da attribuirsi solo in alternativa a quelli corrispondenti nell'implicazione precedente, per chi osserva che su ciascuna delle mediane il baricentro (e quindi O) suddivide la mediana stessa in tre parti uguali, cioè $MG = M'G = M'A$ eccetera;
- **2 punti** per chi osserva che quindi (essendo GM, GN, GL raggi) le mediane sono tutte uguali;
- **2 punti** per chi osserva che se in un triangolo le tre mediane sono uguali tra loro, allora il triangolo è equilatero;
- non si assegnino comunque più di **6 punti** per la seconda implicazione a chi non dimostri che O e G devono necessariamente coincidere, ma lo prenda come assunto.

Esercizio 17

Ovviamente si assegnino 15 punti per la soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta.
Per chi segue la prima traccia.

- Indicare la famiglia di soluzioni $(n, 1)$: **un punto**.
- Indicare la famiglia di soluzioni $(2n, 2n^2 + n + 1)$: **2 punti**.
- Riscrivere la prima condizione come $b = k(a + 1) + 1$: **un punto**.
- Riscrivere la seconda condizione come $(k(a + 1) + 1)h = a^2 + a + 2$: **un punto**.
- Dimostrare che se $kh = a$, allora $h = 2$ e $a = 2k$: **3 punti**.
- Dimostrare che $kh < a$ implica $h > a + 3$: **3 punti**.
- Ricavarne l'assurdo: **2 punti**.
- Discutere il caso $k = 0$: **2 punti**.

Per chi segue la seconda traccia.

- Indicare la famiglia di soluzioni $(n, 1)$: **un punto**.
- Indicare la famiglia di soluzioni $(2n, 2n^2 + n + 1)$: **2 punti**.
- Riscrivere la prima condizione come $b = k(a + 1) + 1$: **un punto**.
- Riscrivere la seconda condizione come $(k(a + 1) + 1)h = a^2 + a + 2$: **un punto**.
- Dimostrare che $h \equiv 2 \mod (a + 1)$: **4 punti**.
- Dimostrare che $h = 2$: **2 punti**.
- Dimostrare che $a = 2k$: **2 punti**.
- Discutere il caso $k = 0$: **2 punti**.